

Primljen / Received: 21.11.2012.

Ispravljen / Corrected: 13.3.2013.

Prihvaćen / Accepted: 3.4.2013.

Dostupno online / Available online: 10.5.2013.

## Nelinearna analiza građevinskih konstrukcija kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata

### Autori:



**Hrvoje Smoljanović**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

[hrvoje.smoljanovic@gradst.hr](mailto:hrvoje.smoljanovic@gradst.hr)



Dr.sc. **Nikolina Živaljić**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

[nikolina.zivaljic@gradst.hr](mailto:nikolina.zivaljic@gradst.hr)



Prof.dr.sc. **Željana Nikolić**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Splitu

Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije

[zeljana.nikolic@gradst.hr](mailto:zeljana.nikolic@gradst.hr)

Pregledni rad

**Hrvoje Smoljanović, Nikolina Živaljić, Željana Nikolić**

### Nelinearna analiza građevinskih konstrukcija kombiniranom metodom konačno-diskretnih elemenata

U radu je prikazan numerički model za dinamičku analizu suho zidanih kamenih i armirano-betonskih konstrukcija zasnovan na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM). Model opisuje ponašanje takvih konstrukcija izloženih dinamičkom opterećenju, pojavu i razvoj pukotina, trošenje energije uslijed nelinearnih efekata, inercijalne efekte uslijed gibanja, kontaktno međudjelovanje i postizanje stanja mirovanja kao posljedicu trošenja energije u sustavu.

#### Ključne riječi:

kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM), suho zidana kamena konstrukcija, armirano-betonska konstrukcija, dinamičko opterećenje

Subject review

**Hrvoje Smoljanović, Nikolina Živaljić, Željana Nikolić**

### Nonlinear analysis of engineering structures by combined finite-discrete element method

A numerical model for dynamic analysis of dry-stone masonry and reinforced-concrete structures, based on the combined finite-discrete element method (FEM/DEM), is presented in the paper. This model describes behaviour of such structures when exposed to dynamic load, crack initiation and propagation, energy dissipation mechanisms due to non linear effects, inertial effects due to motion, contact impact and achievement of the state of rest as a consequence of energy dissipation mechanisms in the system.

#### Key words:

combined finite-discrete element method (FEM/DEM), stone masonry structure, reinforced concrete structure, dynamic load

Übersichtsarbeit

**Hrvoje Smoljanović, Nikolina Živaljić, Željana Nikolić**

### Nichtlineare Analyse von Ingenieurbauwerken durch die kombinierte Finite-Diskrete-Elemente-Methode

In der vorliegenden Arbeit ist ein auf der kombinierten Finite-Diskrete-Elemente-Methode (FEM/DEM) beruhendes numerisches Modell für die dynamische Analyse von Bauten aus Trockensteinmauerwerk und Stahlbetonkonstruktionen dargestellt. Das Modell beschreibt das Verhalten der Tragkonstruktionen unter dem Einfluss dynamischer Lasten, das Auftreten und die Entwicklung von Rissen, durch nichtlineare Effekte entstehende Energiedissipation, bewegungsbedingte Trägheitseffekte, kontaktbedingte Wechselwirkungen, sowie das Erreichen des Ruhezustands zufolge der Energiedissipation.

#### Schlüsselwörter:

kombinierte Finite-Diskrete-Elemente-Methode (FEM/DEM), Steinmauerwerkskonstruktionen, Stahlbetonkonstruktionen, dynamische Lasten

## 1. Uvod

U suvremenom građevinarstvu velik broj građevinskih konstrukcija izvode se kao armiranobetonske ili zidane. Unatoč razlikama u ponašanju jednih i drugih, one pokazuju i neke zajedničke karakteristike posebno u pogledu nastanka pukotina. Nelinearna analiza armiranobetonskih i zidanih konstrukcija izloženih statičkom i dinamičkom opterećenju tijekom posljednjih desetljeća nametnula se kao tehnika koja omogućuje praćenje takvih konstrukcija sve do sloma, s točnošću koja varira ovisno o primijenjenom modelu, odnosno metodi. Jedan od značajnih uzroka nelinearnog ponašanja armiranobetonskih i zidanih konstrukcija je stvaranje pukotina.

Većina modela opisanih u literaturi kojima se simulira ponašanje armiranobetonskih i zidanih konstrukcija zasnovana je na metodi konačnih elemenata.

U armiranobetonskim konstrukcijama pucanje materijala opisuje se modelom razmazanih [1-7] ili diskretnih pukotina [8]. U modelu razmazanih pukotina [1-7] raspucani se beton modelira kao elastični ortotropni materijal s reduciranim modulom elastičnosti u smjeru okomitom na pukotinu. U sklopu ovog pristupa lokalni diskontinuiteti u polju pomaka raspodijeljeni su preko konačnog elementa, dok je osrednjena veza između naprezanja i deformacija opisana općim zakonitostima. U modelu diskretnih pukotina modelirane su pukotine kao geometrijski diskontinuitet odvajanjem konačnih elemenata [8] ili uvođenjem baznih funkcija pomoću kojih je moguće opisati diskontinuitet u polju pomaka [9, 10].

U kontekstu modeliranja zidanih konstrukcija pomoću konačnih elemenata razlikuje se mikromodeliranje i makromodeliranje. Najzastupljeniji pristup modeliranja zidanih konstrukcija u praksi je makromodeliranje [11-14]. U sklopu tog pristupa konstrukcija se simulira kao ortotropni kontinuum u kojem je srednja veza između naprezanja i deformacija dobivena eksperimentalno ili tehnikama homogeniziranja. Nedostatak modeliranja betonskih i zidanih konstrukcija pomoću kontinuuma jest nemogućnost opisivanja pojave velikih diskontinuiteta u polju pomaka. Jedan je od načina rješavanja tog nedostatka uvođenje kontaktnih elemenata unutar mreže konačnih elemenata. U ovom pristupu ponašanje materijala u konačnom elementu najčešće je linearno elastično, dok je materijalna nelinearnost modelirana u kontaktnim elementima. Opća zakonitost ponašanja kontaktnih elemenata bazirana je na teoriji plastičnosti [15-18] ili mehanici oštećenja [19, 20].

Nedostatak modela baziranih na metodi konačnih elemenata je u tome što se ne omogućuje simulirati mehanička interakcija između više tijela, a što je bitno pri analizi konstrukcija izloženih udarnom opterećenju kao i pri analizi progresivnog kolapsa konstrukcija.

Za analizu problema u kojima je prisutna mehanička interakcija između više tijela koja mogu imati velike rotacije i pomake razvijeni su modeli bazirani na metodi diskretnih

elemenata. Ta metoda, čija je prvotna namjena bila simuliranje klizanja i razdvajanja povezanih stijenskih masa duž unaprijed određenih pukotina [21], svoju je primjenu našla u analizi zidanih [22-24] i armiranobetonskih konstrukcija [25]. Glavno obilježje metode diskretnih elemenata koje je omogućilo njezinu primjenu u analizi konstrukcija, posebno zidanih, jest prezentacija konstrukcije kao skupa diskretnih elemenata međusobno povezanih kontaktnim elementima. Ovaj pristup omogućuje simulirati kolaps konstrukcije uslijed rotacije, klizanje te udarno opterećenje.

Nedostatak modela baziranih na metodi diskretnih elemenata je u tome što ne mogu opisati stanje naprezanja i deformacije unutar diskretnih elemenata, a što je vrlo važno pri analizi pojave i razvoja pukotina.

U novije vrijeme postojalo je dosta pokušaja da se iskoriste prednosti metode konačnih i diskretnih elemenata [26-28]. Sve te pokušaje objedinio je Munjiza [29] u metodi konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM). U okviru te metode ponašanje materijala do trenutka pojave pukotine modelirano je kao u metodi konačnih elemenata, dok u trenutku prekoračenja vlačne čvrstoće materijala nastaje diskretna pukotina. Pojava pukotina i fragmentacija diskretnih elemenata obuhvaćena je kontaktnim elementima koji su modelirani između konačnih elemenata.

Prednost je kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata u tome što se mogu opisati pojave vezane za ponašanje sustava uslijed dinamičkog djelovanja u linearno elastičnoj fazi, pojava i razvoj pukotina, inercijalni efekti uslijed gibanja, međudjelovanja koja su posljedica dinamičkog kontakta te naposljetku postizanje stanja mirovanja koje se javlja kao posljedica trošenja energije u sustavu. To je razlog zašto se ova metoda nametnula kao vrlo prikladna za razvoj novog numeričkog modela betona i armature koji omogućuje simulaciju odgovora armiranobetonske konstrukcije izložene dinamičkom opterećenju [30, 31]. Također su provedena istraživanja koja su pokazala prednost primjene kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata u nelinearnoj analizi suho zidanih kamenih konstrukcija [32].

## 2. Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata

Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) [33-35] zasniva se na simulaciji ponašanja velikog broja diskretnih elemenata koji se mogu naći u međusobnoj interakciji. Svaki diskretni element je diskretiziran s vlastitom mrežom konačnih elemenata čime je omogućena njegova deformabilnost. Materijalna nelinearnost, uključujući pojavu i razvoj pukotina te naposljetku fragmentaciju diskretnih elemenata, omogućena je modelom kontaktnih elemenata koji su implementirani između konačnih elemenata. Da bi se svi ovi efekti obuhvatili, u okviru ove metode razvijeni su algoritmi koji u svakom vremenskom koraku uključuju detekciju i interakciju kontakta, praćenje stanja naprezanja i

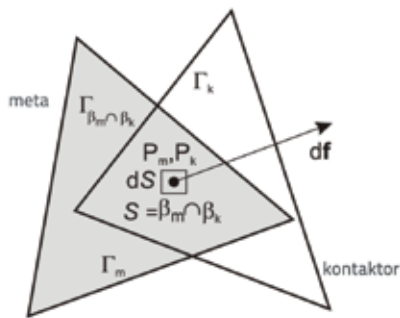
deformacija u konačnom elementu, pojavu i razvoj pukotina, integraciju jednadžbi gibanja u vremenu koja uključuje velike pomake i rotacije te vizualizaciju spomenutih efekata. Veza naprezanja i deformacija u konačnom trokutnom elementu uzeta je u obzir primjenom Hookeova zakona prema izrazu

$$\mathbf{T} = \frac{E}{1+\nu} \bar{\mathbf{E}}_d + \frac{E}{1-2\nu} \bar{\mathbf{E}}_s + \bar{\mu} \mathbf{D} \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{T}$  Cauchyev tenzor naprezanja,  $E$  modul elastičnosti,  $\nu$  Poissonov koeficijent,  $\bar{\mathbf{E}}_d$  dio Green-St. Venantova tenzora deformacija koji se odnosi na promjenu oblika,  $\bar{\mathbf{E}}_s$  dio tenzora deformacija koji se odnosi na promjenu volumena,  $\bar{\mu}$  koeficijent prigušenja i  $\mathbf{D}$  tenzor brzine deformacija [34].

### 2.1. Detekcija i interakcija kontakta

Algoritam detekcije kontakta ima cilj pronaći parove susjednih diskretnih elemenata koji su u kontaktu te eliminirati parove koji su predaleko i ne mogu više biti u kontaktu. U FEM/DEM modelu implementiran je NBS (no binary search) algoritam detekcije kontakta [33, 34]. Ukupno vrijeme potrebno za detekciju svih kontaktnih parova proporcionalno je ukupnom broju diskretnih elemenata.



Slika 1. Kontaktna diferencijalna sila u okolini točaka  $P_m$  i  $P_k$

Nakon što su detektirani parovi diskretnih elemenata, algoritmom kontaktne interakcije određuju se kontaktne sile između dva diskretna elementa u kontaktu od kojih se jedan proglašava kontaktorom, a drugi metom (slika 1.). U algoritmu interakcije distribuirane se kontaktne sile određuju penalty metodom koja se zasniva na principu potencijalnih kontaktnih sila. Kada su u kontaktu, kontaktor i meta se preklapaju preko površine  $S$  koja je omeđena vanjskim rubom  $\Gamma_{\beta_m \cap \beta_k}$ . Tada je ukupna kontaktna diferencijalna sila na kontaktoru  $df_k$  definirana kao

$$df_k = [\text{grad}\varphi_k(P_m) - \text{grad}\varphi_m(P_k)] dS \quad (2)$$

gdje su  $P_m$  i  $P_k$  preklapajuće točke mete i kontaktora, a  $\varphi$  je odgovarajuća funkcija potencijala. Integracijom (2) preko cijele preklapajuće površine  $S$  dobije se ukupna kontaktna sila

$$\mathbf{f}_k = \int_{S=\beta_m \cap \beta_k} [\text{grad}\varphi_k - \text{grad}\varphi_m] dS \quad (3)$$

koja se još može zapisati u obliku

$$\mathbf{f}_k = \oint_{\Gamma_{\beta_m \cap \beta_k}} \mathbf{n}_\Gamma [\varphi_k - \varphi_m] d\Gamma \quad (4)$$

gdje je  $\mathbf{n}_\Gamma$  jedinična vanjska normala na rub  $\Gamma$  preklapajuće površine  $S$ .

U sklopu algoritma kontaktnih sila implementiran je Coulombov model suhog trenja za posmične sile u obliku

$$\mathbf{f}_t = -k_t \delta_t \quad (5)$$

gdje je  $\mathbf{f}_t$  tangencijalna elastična kontaktna sila,  $k_t$  je penalty koeficijent za trenje, a  $\delta_t$  je tangencijalni vektor pomaka između dva elementa [36].

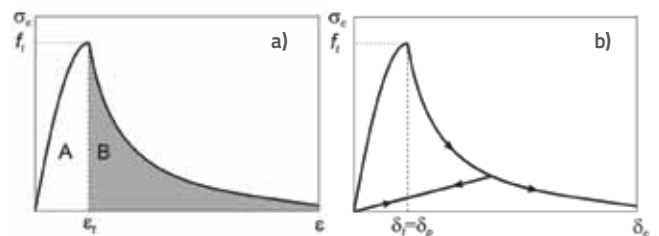
Ako je  $\mathbf{f}_t$  veća od maksimalne sile trenja koja je definirana Coulombovim zakonom,  $|\mathbf{f}_t| > \mu |\mathbf{f}_n|$  tada elementi klize jedan duž drugoga, dok je posmična sila između njih definirana elastičnom normalnom silom  $\mathbf{f}_n$  prema

$$\mathbf{f}_t = -\mu \mathbf{f}_n \quad (6)$$

gdje je  $\mu$  koeficijent trenja.

### 2.2. Model pukotine

Model pukotina koji je implementiran u kombiniranu metodu konačno-diskretnih elemenata namijenjen je za simuliranje pojave i razvoja pukotina u krtim materijalima opterećenih u modu I i II. Mod I opisuje otvaranje pukotine u vlaklu, a mod II opisuje otvaranje pukotine u posmiku. Model se bazira na aproksimaciji eksperimentalne krivulje naprezanje-deformacija betona u direktnom vlaklu [37].

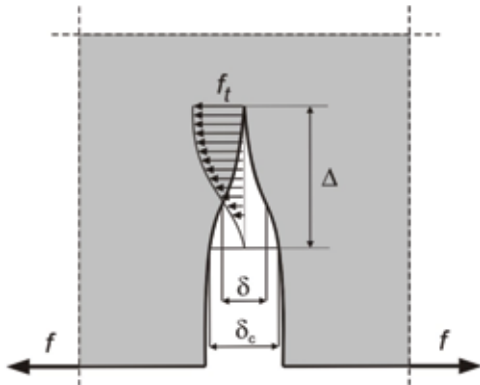


Slika 2. Vlačno omekšanje prikazano u relaciji: a) naprezanje – deformacija; b) naprezanje – pomak

Površina ispod krivulje naprezanje-deformacija u vlaklu podijeljena je na dva dijela kao što je prikazano na slici 2. U ovom modelu dio "A" je implementiran u ponašanje konačnih elemenata na standardan način prema općoj zakonitosti ponašanja materijala [31,34]. Dio "B" prezentira vlačno omekšanje gdje naprezanje opada s povećanjem deformacije [31,37]. To je modelirano s diskretnim modelom pukotine, prikazanim na slici 3., u kojem je radi jednostavnosti pretpostavljeno da se pukotina poklapa s rubom konačnog

elementa. Razdvajanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata inducira naprezanje koje se uzima kao funkcija veličine razdvajanja  $\delta$ , prikazana na slici 2.b.

Površina ispod krivulje naprezanje–pomak od trenutka pojave pukotine  $\delta_c$  do trenutka kada naprezanje padne na nulu  $\delta_c$  predstavlja energiju loma  $G_f$ . To je rad koji je potrebno utrošiti za nastanak pukotine jedinične površine.



Slika 3. Model jedne pukotine za vlačno omeškanje prikazano u relaciji naprezanje – deformacija

Teoretski bi razdvajanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata trebalo biti jednako nuli sve do postizanja vlačne čvrstoće materijala, što bi značilo da je  $\delta_c=0$ . U prikazanom modelu odvajanje je susjednih rubova dvaju konačnih elemenata osigurano topologijom konačnih elemenata na način da niti jedan čvor ne pripada dvama konačnim elementima. Kontinuitet među konačnim elementima do postizanja vlačne čvrstoće osiguran je pomoću *penalty* metode [33]. Na rubu konačnog elementa u smjeru normale modelirane su opruge velike krutosti (slika 4.a) tako da vrijedi  $\delta_c=\delta_p$ . Za razdvajanje  $\delta < \delta_p$  (slika 2.b) vrijedi odnos

$$\sigma_c = \left[ \frac{2\delta}{\delta_p} - \left( \frac{\delta}{\delta_p} \right)^2 \right] f_t \tag{7}$$

gdje je

$$\delta_p = 2hf_t/p_0 \tag{8}$$

odvajanje u trenutku kada naprezanje odgovara vlačnoj čvrstoći materijala  $f_t$ ,  $h$  je veličina konačnog elementa, a  $p_0$  je *penalty* koeficijent kojim se kontrolira relativna pogreška numeričkog rješenja.

U graničnom slučaju kada je

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} \delta_p = 0 \tag{9}$$

odvajanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata jednako je nuli, što odgovara trenutku kada je postignuta vlačna čvrstoća materijala  $f_t$ . Analiza utjecaja *penalty*

koeficijenta na relativnu pogrešku u normalnim pomacima pokazuje da je za  $p_0=100 E$  pogreška manja od 1% [31], gdje je  $E$  modul elastičnosti materijala.

S povećanjem odvajanja  $\delta > \delta_p$  (slika 2b), naprezanje među rubovima konačnih elemenata opada i u trenutku  $\delta=\delta_c$  naprezanje postaje  $\sigma_c=0$ . Za područje  $\delta_c > \delta > \delta_p$  usvojena je veza između naprezanja i pomaka u obliku

$$\sigma_c = z f_t \tag{10}$$

gdje je  $z$  funkcija eksperimentalne krivulje koja opisuje ponašanje betona u vlaklu [37] s koeficijentima  $c_1=3,00$  i  $c_2=6,93$ .

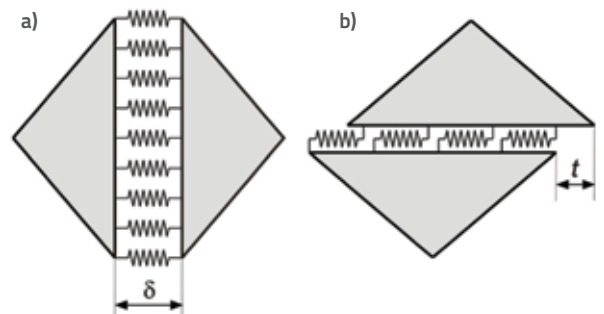
$$z = \left[ 1 + (Dc_1)^3 \right] e^{-Dc_2} - D(1+c_1^3)e^{-c_2} \tag{11}$$

Parametar  $D$  u izrazu (11) iznosi

$$D = \begin{cases} 0, & \text{za } \delta < \delta_p \Rightarrow z = 1; \\ 1, & \text{za } \delta > \delta_p \Rightarrow z = 0; \\ (\delta - \delta_p) / (\delta_c - \delta_p) \text{ inače} \end{cases} \tag{12}$$

Cjelovita relacija koja opisuje odnos  $\delta-\sigma_c$  u modu I može se prikazati u obliku

$$\sigma_c = \begin{cases} \left[ 2 \frac{\delta}{\delta_p} - \left( \frac{\delta}{\delta_p} \right)^2 \right] f_t z & \text{za } 0 < \delta < \delta_p; \\ f_t z & \text{za } \delta > \delta_p; \\ 2 \frac{\delta}{\delta_p} f_t & \text{za } \delta < 0 \end{cases} \tag{13}$$



Slika 4. Model opruge: a) normalna opruga – mod I; b) posmična opruga – mod II

Za pukotine opterećene u modu II pretpostavljeno je da se ponašaju na sličan način kao što je to prikazano za mod I. Do trenutka dok se ne dosegne posmična čvrstoća materijala, rubovi dvaju susjednih konačnih elemenata pridržani su preko posmičnih naprezanja koja se računaju pomoću *penalty* metode [33]. Rubovi su pridržani posmičnim oprugama (slika 4.b) sukladno izrazu

$$\tau_c = \left[ \frac{2t}{t_p} - \left( \frac{t}{t_p} \right)^2 \right] f_s \tag{14}$$

gdje je

$$t_p = 2hf_s / p_0 \quad (15)$$

odvajanje u trenutku kada naprezanje odgovara posmičnoj čvrstoći materijala  $f_s$ ,  $h$  je veličina konačnog elementa, a  $p_0$  je *penalty* koeficijent.

U graničnom slučaju kada je

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} t_p = 0 \quad (16)$$

klizanje rubova dvaju susjednih konačnih elemenata jednako je nuli, što odgovara trenutku kada je postignuta posmična čvrstoća materijala  $f_s$ .

S povećanjem klizanja  $t > t_p$  naprezanje među rubovima konačnih elemenata opada i u trenutku  $t = t_c$  naprezanje postaje  $\tau_c = 0$ . Za područje  $t_c > t > t_p$  pretpostavljena je veza između naprezanja i klizanja u obliku

$$\tau_c = z f_s \quad (17)$$

gdje je  $D$  definiran izrazom

$$D = \begin{cases} 0, & \text{za } |t| < t_p, z = 1; \\ 1, & \text{za } |t| > t_c, z = 0; \\ (|t| - t_p) / (t_c - t_p), & \text{inače} \end{cases} \quad (18)$$

Cjelovita relacija koja opisuje odnos  $\tau_c - t$  u modu II može se prikazati u obliku

$$\tau_c = \begin{cases} \left[ 2 \frac{|t|}{t_p} - \left( \frac{|t|}{t_p} \right)^2 \right] f_s z & \text{za } |t| < t_p; \\ f_s z & \text{za } |t| > t_p \end{cases} \quad (19)$$

U slučaju da je pukotina opterećena u modu I i modu II, tada se za proračun normalnih odnosno posmičnih naprezanja i dalje koriste isti izrazi kao što je to prethodno objašnjeno, s tim da se usvaja faktor oštećenja  $D$  koji je definiran kao

$$D = \begin{cases} 0, & \text{za } \delta < \delta_p \text{ i } |t| < t_p \Rightarrow z = 1; \\ 1, & \text{za } \delta > \delta_c \text{ ili } |t| > t_c \Rightarrow z = 0; \\ (\delta - \delta_p) / (\delta_c - \delta_p), & \text{za } \delta > \delta_p \text{ i } |t| < t_p; \\ (|t| - t_p) / (t_c - t_p), & \text{za } \delta < \delta_p \text{ i } |t| > t_p; \\ \left( \frac{\delta - \delta_p}{\delta_c - \delta_p} \right)^2 + \left( \frac{|t| - t_p}{t_c - t_p} \right)^2, & \text{za } \delta_p < \delta < \delta_c \text{ i } t_p < |t| < t_c \end{cases} \quad (20)$$

Kriterij loma određen je uvjetom

$$D \leq 1 \quad (21)$$

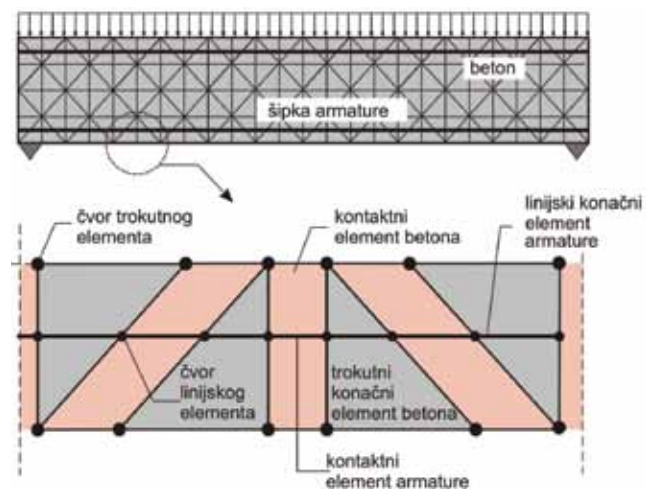
### 2.3. Numerički model armature u FEM/DEM modelu

U okviru FEM/DEM metode konstrukcija je diskretizirana mrežom konačnih i kontaktnih elemenata kao što je to prikazano na slici 5. Armiranobetonska konstrukcija modelira

se na način da se trokutnim konačnim elementima modelira beton, dok se armatura modelira dvočvornim štapnim elementima [38, 39] ugrađenima u konačne elemente betona. U prvom koraku pojedina armatura se unosi kao jedna šipka. Nakon što je konstrukcija podijeljena na određeni broj konačnih elemenata, traže se referentne točke, odnosno sjecišta armaturene šipke i krajeva konačnih elemenata betona. Na taj način nastaju linijski konačni elementi armature prikazani na slici 5.

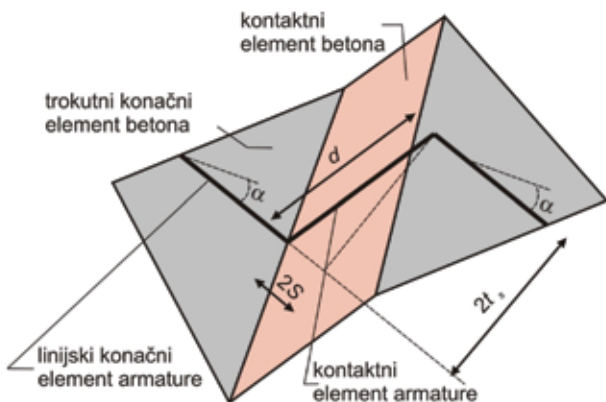
Prije otvaranja pukotina u betonu konstrukcija je u linearno elastičnom području, a trokutni konačni element betona i dvočvorni element armature ponašaju se kao jedno tijelo. Deformacija trokutnog elementa utječe na deformaciju konačnog elementa armature. Uslijed toga nastaju naprezanja u armaturi. Kao posljedica toga nastaju sile čiji se utjecaj uzima u obzir u obliku ekvivalentnih sila u čvorovima trokutnog elementa. Na taj je način ostvarena veza između betona i čelika u linearno elastičnom području.

Pojava pukotine odnosno odvajanje rubova susjednih konačnih elemenata omogućena je na način da su susjedni rubovi trokutnih konačnih elemenata betona i krajnje točke susjednih linijskih konačnih elemenata armature opisani s različitim čvorovima.



Slika 5. Diskretizacija AB konstrukcije

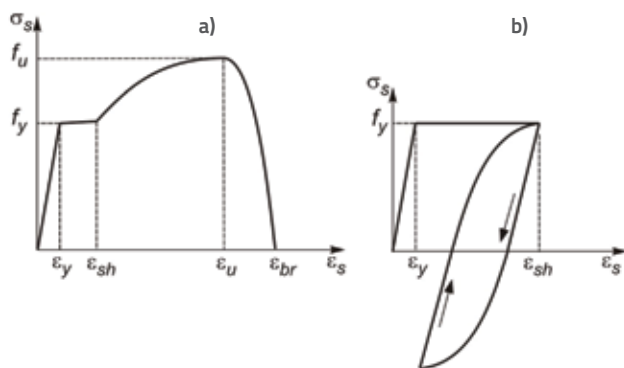
Nastanak i razvoj pukotina u betonu odvija se unutar 2D kontaktnog elementa betona postavljenog između rubova trokutnih konačnih elemenata. Istodobno se armatura unutar kontaktnog elementa betona deformira, a njeno nelinearno ponašanje modelira se pomoću linijskog kontaktnog elementa armature umetnutog između susjednih čvorova konačnih elemenata armature. U ovom modelu u konačnom linijskom elementu armature usvojena je pretpostavka da je veza između naprezanja i deformacija linearno elastična te da između armature i betona nema proklizavanja, što znači da je deformacija armature i betona u konačnom elementu jednaka [30].



Slika 6. Kontaktne elemente armature

Nelinearno ponašanje armature modelirano je unutar kontaktnog elementa armature. Model armature u kontaktnom elementu [30] podijeljen je na dio prije i dio nakon pojave pukotine. Prije pojave pukotine kontaktne elemente armature održava kontinuitet između linijskih elemenata armature, što znači da bi teoretski razdvajanje  $d$  susjednih točaka kontaktnog elementa (slika 6.) trebalo biti jednako 0. U aktualnoj implementaciji to je postignuto *penalty* metodom [30].

Model ponašanja armature u kontaktnom elementu temelji se na eksperimentalnim krivuljama koje opisuju stanje deformacije armaturene šipke u pukotini uzimajući u obzir i plastične deformacije nastale uslijed cikličkog opterećenja [40]. U kontaktnom elementu armature modeliran je utjecaj zakrivljenosti duž armaturene šipke u zoni savijanja i utjecaj udaljenosti pukotina [30]. Za armaturni čelik usvojen je poboljšani Katoov materijalni model kojim je omogućena simulacija cikličkog ponašanja čelika [41].



Slika 7. Veza naprezanje–deformacija za armaturni čelik: a) monotonno opterećenje; b) cikličko opterećenje [41]

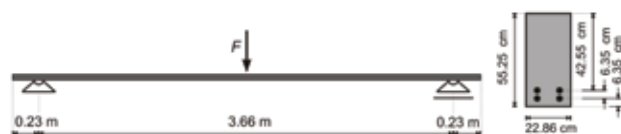
### 3. Numerički primjeri

U nastavku je prikazana opravdanost razvijenog numeričkog modela zasnovanog na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata na primjerima armiranobetonske grede

i kamenog zida izloženih monotono rastućem opterećenju. Korišteni su primjeri iz literature s poznatim rezultatima fizikalnih eksperimenata. Također su analizirani primjeri kojima je prikazana mogućnost primjene razvijenog modela u analizi armiranobetonskih i suho zidanih kamenih konstrukcija na udarno opterećenje, te u inkrementalnoj dinamičkoj analizi koja je u ovom slučaju provedena inkrementalnim povećavanjem amplitude realnog potresa sve do sloma konstrukcije.

#### 3.1. Bresler-Scordelisoa armiranobetonska greda

Bresler-Scordelisoa armiranobetonska greda, preuzeta iz literature [42], odabrana je s ciljem validacije implementiranog modela za slučaj monotono rastućeg opterećenja i usvojene nelinearne karakteristike materijala. Geometrijske karakteristike analizirane armiranobetonske grede prikazane su na slici 8.



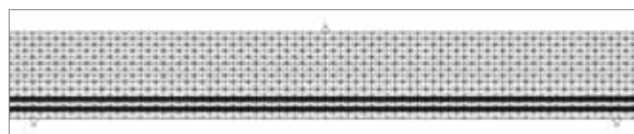
Slika 8. Geometrija slobodno oslonjene AB grede

Karakteristike materijala korištene u numeričkoj analizi preuzete su iz literature i prikazane u tablici 1.

Tablica 1. Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Beton		Čelik	
Modul elastičnosti, $E_c$ [MPa]	22.753	Modul elastičnosti, $E_s$ [MPa]	191.674
Poissonov koeficijent, $\nu$	0,2	Granica popuštanja, $f_y$ [MPa]	414,69
Vlačna čvrstoća, $f_t$ [MPa]	2,3	Površina poprečnog presjeka, $A_{s7}$ [cm <sup>2</sup> ]	2,54
Tlačna čvrstoća, $f_c$ [MPa]	21,79		
Energija loma, $G_r$ [N/m]	105		

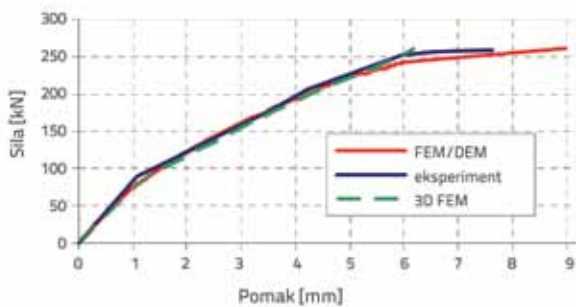
Greda je izložena djelovanju koncentrirane monotono rastuće sile u sredini raspona. Eksperimentom je dobiveno opterećenje koje izaziva lom konstrukcije  $F=258$  kN.



Slika 9. Diskretizacija sustava

Beton je diskretiziran sa 2355 trokutnih elemenata, a svaka armaturna šipka sa 168 dvočvornih elemenata. Opterećenje se nanosi sve do sloma. Diskretizacija sustava prikazana je na slici 9.

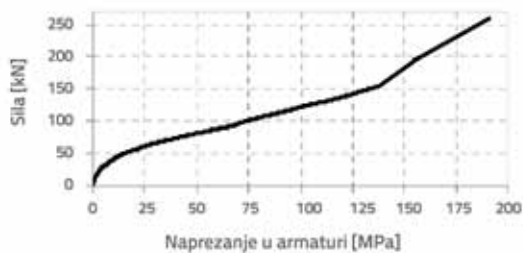
U literaturi [42] prikazani su rezultati dobiveni eksperimentom i numeričkim proračunom 3D FEM metodom. Opisana je izvedba nelinearne numeričke analize s trodimenzionalnom diskretizacijom sustava te nastavak pomaka točke u sredini raspona sve do sloma. Rezultati tih analiza te usporedbe s rezultatima koji su dobiveni numeričkim modelom zasnovanim na FEM/DEM metodi prikazani su dijagramom na slici 10.



Slika 10. Dijagram pomaka u sredini raspona nosača

Dijagramom je prikazan pomak točke u sredini raspona nosača u ovisnosti o zadanoj koncentriranoj sili  $F$ . Najveće odstupanje rezultata dobivenih FEM/DEM metodom je 3.8%. Za granično opterećenje koje prema pokusu iznosi 258,1 kN, a FEM/DEM metodom 260,2 kN ostvarena je točnost 0,8%. U usporedbi s rezultatima 3D analize konačnim elementima, vrijednost pomaka neposredno prije sloma dobivene FEM/DEM metodom pokazuje bolje slaganje s rezultatima eksperimenta.

Dijagramom prikazanim na slici 11. pokazana je ovisnost naprezanja u armaturi o primijenjenoj koncentriranoj sili  $F$ . Odabran je element ispod mjesta djelovanja sile  $F$  u donjoj šipki armature. Može se uočiti da granica tečenja u armaturi nije dosegnuta. Značajno je uočiti da do potpunog sloma konstrukcije, kako u eksperimentu tako i u numeričkoj analizi provedenoj razvijenim modelom, dolazi zbog popuštanja betona u tlaku. Time je pokazano da ovaj model jako dobro opisuje nelinearno ponašanje armiranobetonskih konstrukcija za slučaj sloma po betonu.



Slika 11. Dijagram ovisnosti naprezanja u armaturi o primijenjenoj koncentriranoj sili  $F$

Na slici 12. prikazane su pukotine za pojedine iznose sile. Pukotine se registriraju kada je nastupilo potpuno popuštanje betona ( $\delta = \delta_c$ ).

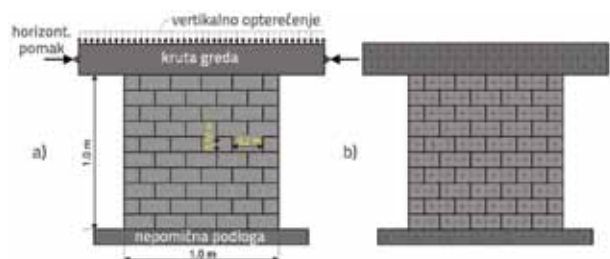
Sa slike 12.d može se uočiti da je potpuni slom konstrukcije postignut za silu 260,1 kN.



Slika 12. Pukotine na konstrukciji za opterećenja: a)  $F=216,0$  kN; b)  $F=259,0$  kN; c)  $F=261,0$  kN; d)  $F=261,1$  kN

### 3.2. Suhozid izložen monotono rastućem posmičnom opterećenju

U ovom primjeru analizirana je valjanost razvijenog numeričkog modela pri opisivanju posmičnog ponašanja kamenog zida u svojoj ravni. U tu svrhu odabran je eksperiment koji je Oliveira [43] proveo radi proučavanja posmičnog ponašanja kamenih zidova. Numerički rezultati dobiveni modelom zasnovanim na FEM/DEM metodi uspoređeni su s rezultatima tog eksperimenta. Eksperimentalni program sastojao se od serije kvazistatičkih monotoni testova provedenih na malom uzorku kamenog zida čija je geometrija prikazana na slici 13.a. Diskretizacija zida korištena u numeričkoj analizi prikazana je na slici 13.b.



Slika 13. Shematski prikaz kamenog zida: a) geometrija i opterećenje; b) diskretizacija konstrukcije

Zid se sastojao od kamenih blokova pravilnih dimenzija. Srednje vrijednosti mehaničkih karakteristika granita korištenog u eksperimentu preuzete su iz literature i prikazane u tablici 2.

Tablica 2. Srednje vrijednosti mehaničkih karakteristika kamena korištenog u eksperimentu [43]

Modul elastičnosti, $E$ [MPa]	15500
Vlačna čvrstoća, $f_t$ [MPa]	3.7
Tlačna čvrstoća, $f_c$ [MPa]	57.0
Energija loma, $G_f$ [N/m]	110

Posmično ponašanje zidova provedeno je za dvije vrijednosti vertikalne uzdužne sile (30 kN i 100 kN) što odgovara predtlačnom naprezanju od 0.15 MPa i 0.5 MPa. Koeficijent trenja između kamenih blokova dobiven je eksperimentom i iznosio je  $\mu=0.62$ . Srednje vrijednosti modula elastičnosti zida u ovisnosti o predtlačnom naprezanju koje su se koristile u numeričkoj analizi prikazane su u tablici 3.

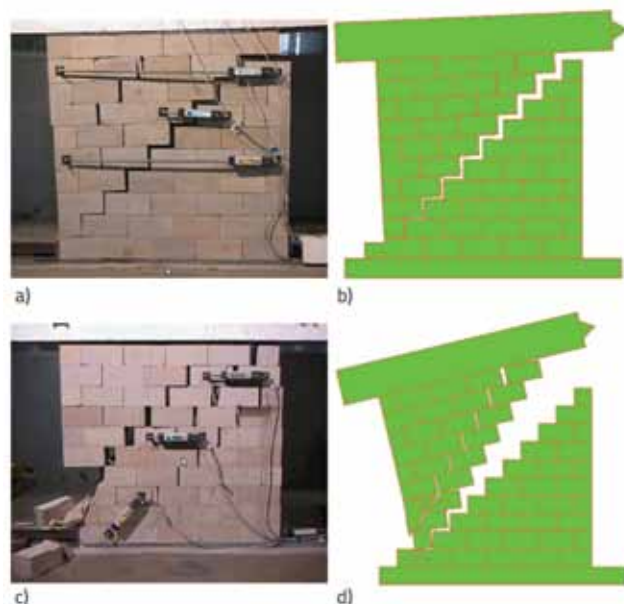
Tablica 3. Srednje vrijednosti modula elastičnosti zida [43]

Predtlačno naprezanje	Modul elastičnosti [MPa]
$\sigma = 0.15$ (MPa)	566
$\sigma = 0.50$ (MPa)	756

U navedenoj literaturi [43] prikazani su rezultati dobiveni eksperimentima i proračunom baziranom na numeričkom modelu koji su razvili Lourenco i Rots [17]. Taj je model zasnovan na metodi konačnih elemenata s ugrađenim kontaktnim elementima čija se opća zakonitost ponašanja temelji na teoriji plastičnosti. Rezultati ovih analiza te usporedbe s rezultatima dobivenim numeričkim modelom zasnovanim na FEM/DEM metodi prikazani su dijagramom na slici 14.

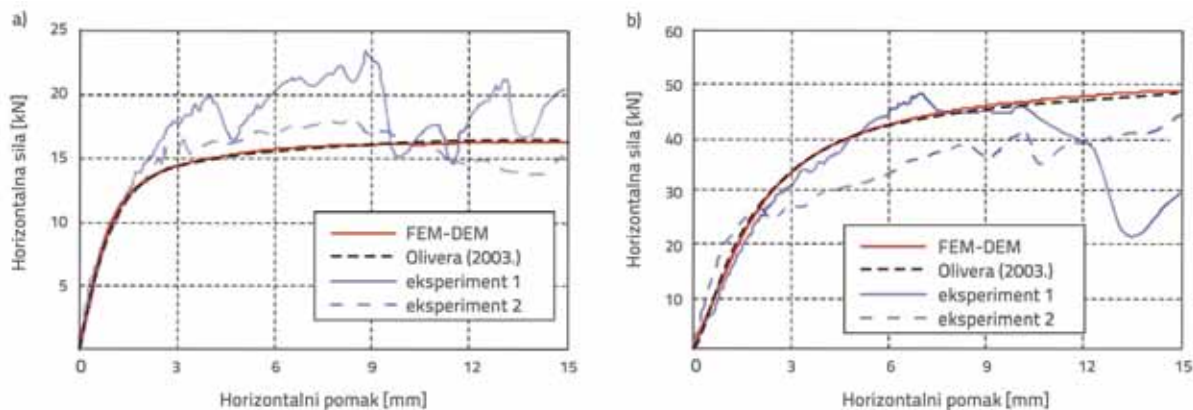
Može se uočiti dobro slaganje rezultata dobivenih modelom zasnovanim na FEM/DEM metodom s numeričkim rezultatima koje je dobio Oliveira [43]. Slaganje numeričkih i eksperimentalnih rezultata može se smatrati zadovoljavajućim ako se uzme u obzir da je eksperiment proveden sa suhozidom od prirodnog kamena. Naime, kod takvih zidova utjecaj neravnina između

blokova ima značajan učinak na ponašanje zida, a vrlo teško ga je numerički modelirati. Na slici 15. prikazana je usporedba rezultata numeričkog i fizikalnog eksperimenta za predtlačno naprezanje 0,15 MPa i 0,5 MPa.



Slika 15. Načini otkazivanja nosivosti suhozida: a) predtlačno naprezanje 0.15 MPa eksperimentalno; b) predtlačno naprezanje 0.15 MPa numerički; c) predtlačno naprezanje 0.50 MPa eksperimentalno; d) predtlačno naprezanje 0.50 MPa numerički

Usporedbom numeričkih rezultata dobivenih FEM/DEM modelom s fizikalnim eksperimentima pokazalo se da je način sloma dobivenog numerički sličan onome koji je dobiven eksperimentom. Također se može uočiti da za niske vrijednosti predtlačnog naprezanja ne dolazi do loma kamenih blokova, a potpuni slom konstrukcije nastupa uslijed prevrtanja. Za veće vrijednosti predtlačnog naprezanja dolazi do pucanja kamenih blokova pa treba uzeti u obzir mogućnost pojave i razvoja pukotina unutar kamenih blokova pri takvim vrstama analiza, što je ova primjer i pokazao (slika 15.d).



Slika 14. Usporedba rezultata numeričkog i fizikalnog eksperimenta: a) predtlačno naprezanje 0.15 MPa; b) predtlačno naprezanje 0.50 MPa



### 3.3. Armiranobetonska greda izložena udarnom opterećenju

U ovom primjeru prikazana je mogućnost primjene numeričkog modela zasnovanog na FEM/DEM metodi u analizi armiranobetonskih konstrukcija izloženih udarnom opterećenju. Za primjer je odabrana slobodno oslonjena armiranobetonska greda izložena udaru projektila. Geometrijske karakteristike grede i projektila prikazane su na slici 16. U numeričkoj analizi projektil mase 37.5 kg izložen je početnim brzinama  $v_1=60$  m/s i  $v_2=80$  m/s.



Slika 16. Geometrijske karakteristike armiranobetonske grede

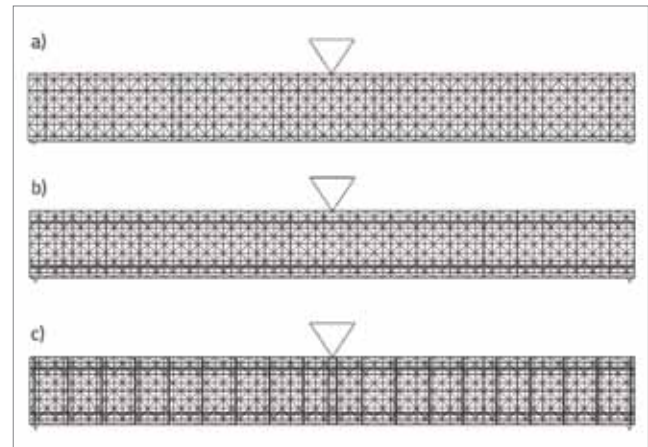
Karakteristike betona i armaturnog čelika grede prikazane su u tablici 5.

Tablica 5. Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Beton		Čelik	
Modul elastičnosti, $E_c$ [MPa]	29.730	Modul elastičnosti, $E_s$ [MPa]	210.000
Poissonov koeficijent, $\nu$	0,2	Granica popuštanja, $f_y$ [MPa]	420
Vlačna čvrstoća, $f_t$ [MPa]	3,12	Površina poprečnog presjeka, $A_{s1}$ [cm <sup>2</sup> ]	1,02
Tlačna čvrstoća, $f_c$ [MPa]	40,0	Površina poprečnog presjeka, $A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ]	4,52
Prigušenje $\bar{\mu}$	$2,5 \cdot 10^6$	Vilice [cm]	$\phi 8/15$

Prethodnim analizama u okviru primjene ove metode pokazalo se da vrijednost koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$  usvojenog u ovoj numeričkoj analizi odgovara koeficijentu restitucije 0.18. Ova vrijednost koeficijenta restitucije utvrđena je na kamenim uzorcima. Pretpostavljeno je da beton korišten u ovoj analizi ima isti koeficijent restitucije.

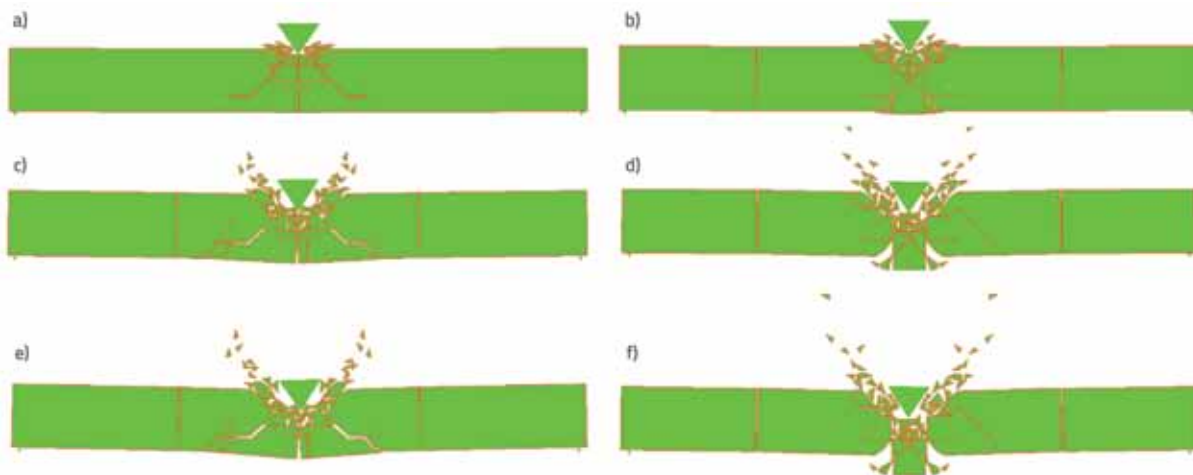
Numerička analiza provedena je za tri slučaja: a) nearmirana betonska greda, b) greda armirana uzdužnom armaturom, c) greda armirana uzdužnom armaturom i vilicama. Na slici 17. prikazana je diskretizacija sustava za sva tri slučaja.



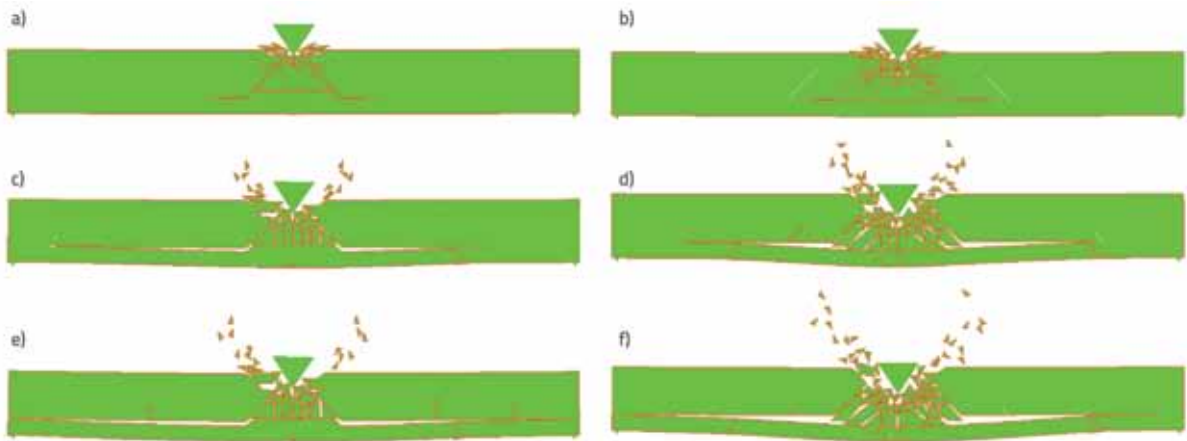
Slika 17. Diskretizacija slobodno oslonjene grede: a) nearmirana betonska greda; b) greda armirana uzdužnom armaturom; c) greda armirana uzdužnom armaturom i vilicama

Na slici 18. prikazane su pukotine u vremenu za nearmiranu betonsku slobodno oslonjenu gredu, za brzine  $v=60$  m/s i  $v=80$  m/s.

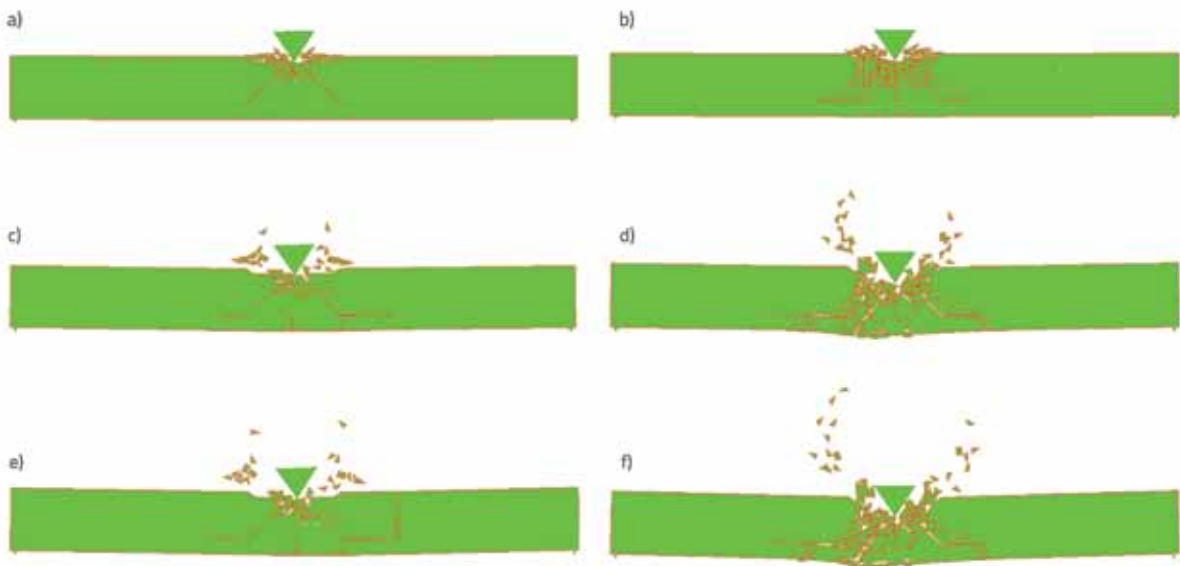
Na slici 19. prikazane su pukotine u vremenu za slobodno oslonjenu gredu armiranu uzdužnom armaturom za brzine  $v=60$  m/s i  $v=80$  m/s.



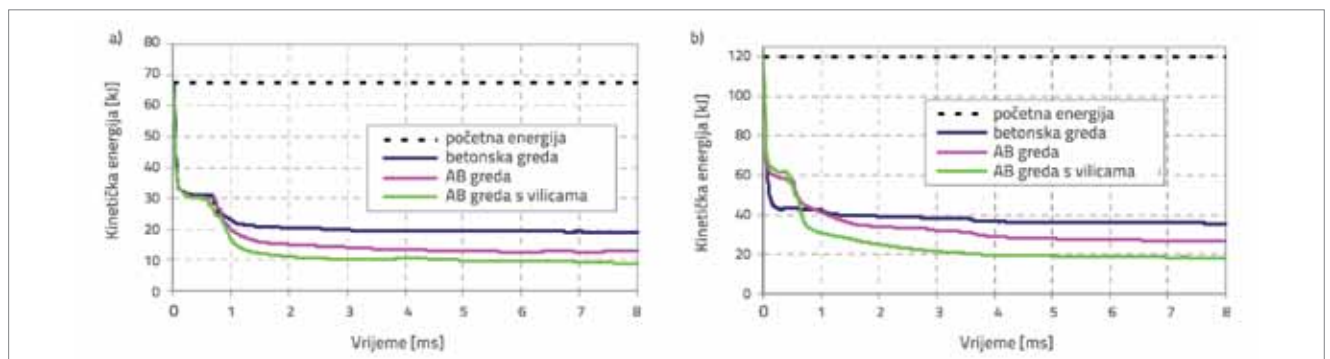
Slika 18. Nearmirana slobodno oslonjena betonska greda: a)  $v=60$  m/s;  $t=1.0$  ms; b)  $v=80$  m/s;  $t=1.0$  ms; c)  $v=60$  m/s;  $t=5.5$  ms; d)  $v=80$  m/s;  $t=5.5$  ms; e)  $v=60$  m/s;  $t=8.0$  ms; f)  $v=80$  m/s;  $t=8.0$  ms.



Slika 19. Slobodno oslonjena greda armirana uzdužnom armaturom: a)  $v=60$  m/s;  $t=1.0$  ms; b)  $v=80$  m/s;  $t=1.0$  ms; c)  $v=60$  m/s;  $t=5.5$  ms; d)  $v=80$  m/s;  $t=5.5$  ms; e)  $v=60$  m/s;  $t=8.0$  ms; f)  $v=80$  m/s;  $t=8.0$  ms



Slika 20. Slobodno oslonjena greda armirana uzdužnom armaturom i vilicama: a)  $v=60$  m/s;  $t=1.0$  ms; b)  $v=80$  m/s;  $t=1.0$  ms; c)  $v=60$  m/s;  $t=5.5$  ms; d)  $v=80$  m/s;  $t=5.5$  ms; e)  $v=60$  m/s;  $t=8.0$  ms; f)  $v=80$  m/s;  $t=8.0$  ms

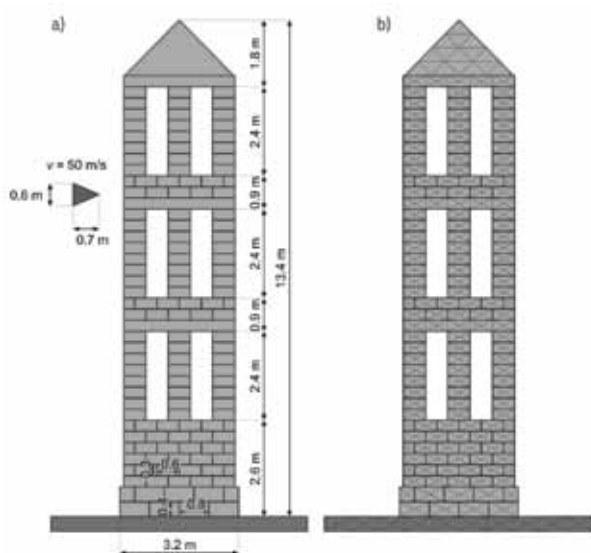


Slika 21. Trošenje kinetičke energije: a)  $v=60$  m/s; b)  $v=80$  m/s

Na slici 20. prikazane su pukotine u vremenu za slobodno oslonjenu gredu armiranu uzdužnom armaturom i vilicama, za brzine  $v=60$  m/s i  $v=80$  m/s. Ukupna kinetička energija projektila i grede kao funkcija vremena prikazana je na slici 21. Ako se zanemari potencijalna energija grede, što je moguće jer nema oscilacija prije i nakon sudara, tada razlika između početne i kinetičke energije prikazuje trošenje energije prilikom sudara. Sa slike 18. može se uočiti da kod nearmirane grede dolazi do proboja projektila kroz gredu. Međutim ako je greda armirana samo uzdužnom armaturom, dolazi do cijepanja grede iznad donje armaturne šipke (slika 19.), a ako je armirana uzdužnom armaturom i vilicama, dolazi do velikih oštećenja betona i armature, ali nije došlo do proboja projektila (slika 20.). To se može vidjeti i iz dijagrama kinetičke energije (slika 21.) u kojima je za slučaj grede armirane uzdužnom armaturom i vilicama došlo do najvećeg trošenja energije.

### 3.4. Suho zidani kameni zvonik izložen udarnom i potresnom opterećenju

U ovom primjeru prikazana je mogućnost primjene razvijenog numeričkog modela u analizi suho zidanih kamenih konstrukcija izloženih udarnom i potresnom inkrementalnom opterećenju. Za analizu je odabrana konstrukcija suho zidanog kamenog zvonika. Na slici 22. prikazana je geometrija i diskretizacija konstrukcije. Zvonik se sastoji od kamenih blokova pravilnih dimenzija. Karakteristike kamena na osnovi kojih je provedena numerička analiza prikazane su u tablici 6. Vrijednost koeficijenta prigušenja  $\bar{\mu}$  usvojenog u ovoj numeričkoj analizi odgovara koeficijentu restitucije 0.18 koja je dobivena eksperimentalno na kamenim uzorcima. Koeficijent trenja u numeričkoj analizi uzet je u iznosu  $\mu=0.60$ . Usvojena energija loma za vlak karakteristična je za granit i preuzeta je iz literature [44], dok je za energiju loma u posmiku pretpostavljena ista vrijednost kao za vlak.

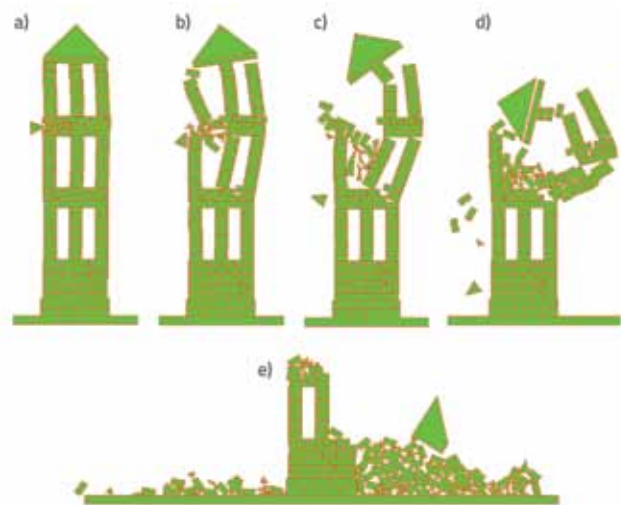


Slika 22. Shematski prikaz kamenog zvonika: a) geometrija konstrukcije i projektila; b) diskretizacija konstrukcije

Tablica 6. Karakteristike kamena primjenjene u numeričkoj analizi

Modul elastičnosti, $E$ [MPa]	82000
Poissonov koeficijent $\nu$	0.16
Vlačna čvrstoća, $f_t$ [MPa]	12.7
Posmična čvrstoća, $f_s$ [MPa]	50
Energija loma za vlak, $G_{ft}$ [N/m]	2500
Energija loma za posmik, $G_{cs}$ [N/m]	2500
Prigušenje $\bar{\mu}$	$2.5 \cdot 10^6$

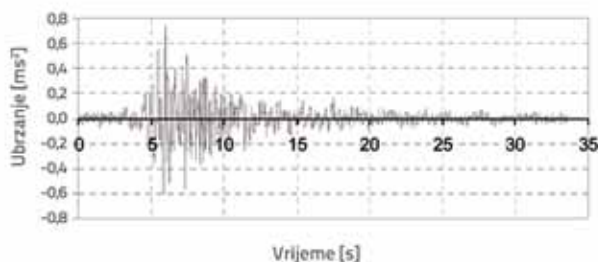
U ovoj analizi prikazan je kameni zvonik izložen djelovanju udara projektila brzine  $v = 50$  m/s. Na slici 23. prikazana je konstrukcija izložena takvom opterećenju u pojedinim vremenskim trenucima.



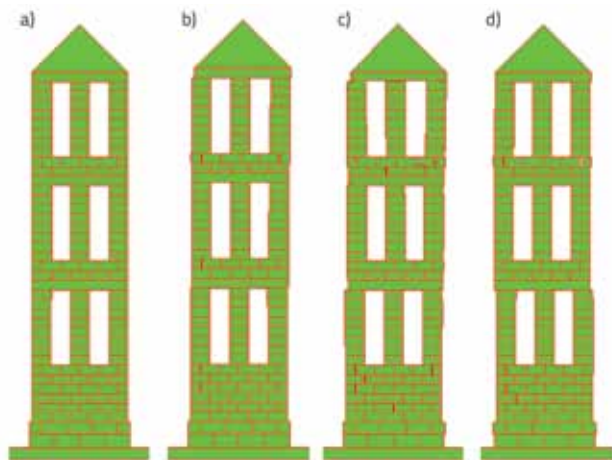
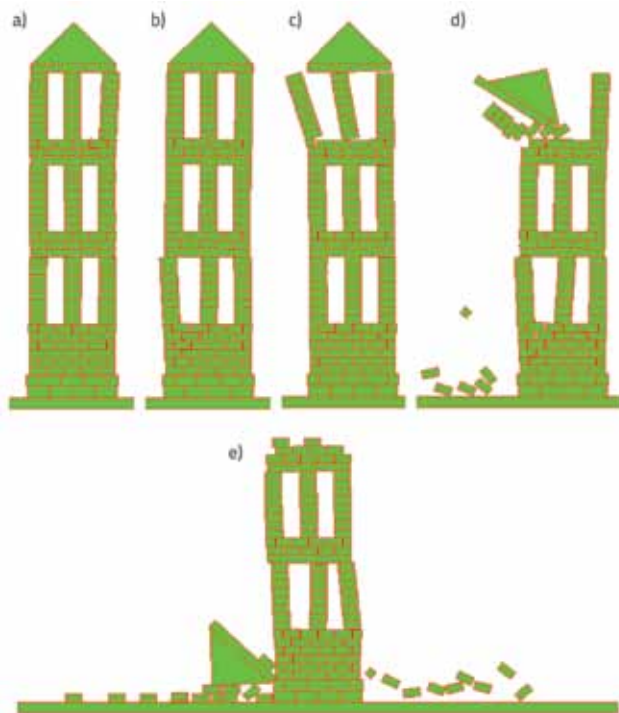
Slika 23. Kameni zvonik izložen udaru projektila: a)  $t=0.1$  s; b)  $t=0.5$  s; c)  $t=1.0$  s; d)  $t=1.6$  s; e)  $t=2.0$  s

Ovdje se može uočiti prednost ovog modela koji može simulirati udarno opterećenje te predvidjeti način potpunog sloma konstrukcije koji ovisi o trošenju energije prilikom sudara, pojavi i razvoju pukotina te inercijalnim efektima pojedinih dijelova konstrukcije.

Prikazani kameni suho zidani zvonik analiziran je metodom inkrementalne dinamičke analize koja se u novije vrijeme primjenjuje za analizu odgovora konstrukcija izloženih seizmičkom opterećenju [45]. Ona se zasniva na inkrementalnom povećavanju opterećenja (u ovom slučaju amplitude realnog potresa) te omogućuje praćenje ponašanja konstrukcija izloženih potresnom opterećenju u vremenu sve do sloma. To omogućuje analizu načina nastanka sloma konstrukcije, određivanje kapaciteta nosivosti konstrukcije, faktora ponašanja te praćenje drugih parametara duktilnosti konstrukcija.



Slika 24. Akcelelogram potresa Petrovac (1979. Crna Gora)

Slika 25. Pomaci blokova kamenog zvonika nastali za vršno ubrzanje: a)  $a_g=0.22g$ ; b)  $a_g=0.80g$ ; c)  $a_g=1.00g$ ; d)  $a_g=1.20g$ Slika 26. Kameni zvonik izložen djelovanju potresa za vršno ubrzanje  $a_g=1.50g$ : a)  $t=6.30$  s; b)  $t=7.32$  s; c)  $t=11.40$  s; d)  $t=13.44$  s; e)  $t=18.20$  s

Inkrementalna dinamička analiza kamenog zvonika provedena je na način da je konstrukcija izložena horizontalnom ubrzanju podloge (slika 24.) koje je snimljeno 15.4.1979. u Dubrovniku na stjenovitom tlu za vrijeme potresa čiji je epicentar bio u Petrovcu (Crna Gora). Akcelelogram je najprije skaliran na vršno ubrzanje  $a_g=0.22g$  koje vrijedi za Split, a potom je postupno povećavan do vršnog ubrzanja koje izaziva potpuni slom konstrukcije. Na slici 25. prikazani su pomaci blokova nastali za pojedina vršna ubrzanja. Na slici 26. prikazani su pomaci blokova u vremenu za vršno ubrzanje  $a_g=1.50g$  pri kojem je došlo do potpunog sloma konstrukcije.

Na ovom primjeru očita je prednost modela koji može simulirati potpuni slom konstrukcije prouzročen velikim pomacima i rotacijama kamenih blokova između kojih djeluju sile trenja.

#### 4. Zaključak

U ovom radu prikazana je mogućnost primjene kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata u nelinearnoj analizi građevinskih konstrukcija.

U okviru rada provedena je usporedba numeričkih rezultata dobivenih razvijenim modelom koji je zasnovan na FEM/DEM metodi s numeričkim i eksperimentalnim rezultatima na armiranobetonskim i suho zidanim kamenim konstrukcijama čiji su rezultati dostupni u literaturi.

U analizi armiranobetonske grede izložene monotono rastućem opterećenju, numerički rezultati za slomno opterećenje dobiveni ovim modelom, u usporedbi s numeričkim rezultatima programa za nelinearnu analizu zasnovanih na metodi konačnih elemenata, pokazuju veću točnost u odnosu na fizikalni eksperiment.

Na primjeru analize suhozida izloženog monotono rastućem opterećenju dobiveni rezultati modelom koji se zasniva na FEM/DEM metodi pokazuju dobro slaganje s numeričkim rezultatima nelinearnog modela koji se zasniva na metodi konačnih elemenata. Slaganje numeričkih rezultata s eksperimentalnim u ovom primjeru može se smatrati zadovoljavajućim, ako se uzme u obzir da je eksperiment proveden sa suhozidom od prirodnog kamena te je kod takvih zidova utjecaj neravnina između blokova značajan i vrlo teško ga je numerički modelirati.

U radu su također prikazane neke od mogućnosti primjena metode u analizi konstrukcija izloženih udarnom opterećenju te u inkrementalnoj dinamičkoj analizi.

Analizom betonske nearmirane i armirane grede pokazalo se da ovisno o načinu armiranja dolazi do stvaranja i širenja pukotina, kao i do odgovarajućeg trošenja energije.

Analizom suho zidanog kamenog zvonika izloženog udarnom opterećenju pokazala se prednost ovog modela u simulaciji udarnog opterećenja te u predviđanju načina potpunog sloma konstrukcije. Također je pokazana mogućnost primjene ove metoda u inkrementalnoj dinamičkoj analizi.

Numeričke analize prikazane u ovom radu pokazuju da model zasnovan na kombiniranoj metodi konačno-

diskretnih elemenata omogućuje realistično modeliranje pukotina u armiranobetonskoj konstrukciji sve do sloma kao i određivanje načina kolapsa suho zidane kamene

konstrukcije. Također se može pratiti ponašanje konstrukcije nakon sloma, što je značajno pri analizi posljedica sloma i rušenja konstrukcije.

## LITERATURA

- [1] Rashid, Y.R.: Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels, *Nuclear Engineering and Design*, 7 (4), pp. 334-344, 1968.
- [2] Vebo, A. and Ghali, A.: Moment-Curvature Relation of Reinforced Concrete Slabs, *Journal of Structural Division*, ASCE, 103 (3), pp. 515-531, 1977.
- [3] Bažant, Z.P. and Cedolin, L.: Fracture Mechanics of Reinforced Concrete, *Journal of the Engineering Mechanics*, ASCE, 106 (6), pp. 1287-1306, 1980.
- [4] Kožar, I., Ibrahimbegović, A.: Finite element formulation of the finite rotation solid element, *Finite Elements in Analysis and Design*, 20 (2), pp. 101-126, 1995.
- [5] Ibrahimbegovic, A., Kozar, I.: Non-linear Wilson's Brick Element for Finite Elastic Deformations of the Three-dimensional Solids, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11 (8), pp. 655-664, 1995.
- [6] Ožbolt, J., Meštović, D., Kožar, I.: Trodimenzijski proračun prearmiranih betonskih greda, *Građevinar*, 58, pp. 95-101, 2006.
- [7] Travaš, V., Ožbolt, J., Kožar, I.: Failure of plain concrete beam at impact load: 3D finite element analysis, *International Journal of fracture*, 160, pp. 31-41, 2009.
- [8] Ngo, D. and Scordelis, A.C.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, *Journal of ACI*, 64 (3), pp. 152-163, 1967.
- [9] Belytschko, T. and Black, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, pp. 601-620, 1999.
- [10] Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T.: CA finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, pp. 131-150, 1999.
- [11] Lourenço, P.B.: Computational strategies for masonry structures. Ph.D. dissertation. The Netherlands, Delft: Delft University of Tehnology, 1996.
- [12] Lourenço, P.B., Rots J.G., Blaauwendraad, J.: Continuum model for masonry: parameter estimation and validation, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 1(6), pp. 642-652, 1998.
- [13] Papa, E.A.: Unilateral damage model for masonry based on a homogenization procedure, *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 1, pp. 349-366, 1996.
- [14] Berto, L., Saetta, A., Scotta, R., Vitaliani, R.: An orthotropic damage model for masonry structures, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 55, pp. 127-157, 2002.
- [15] Lofti, H.R., Shing, P.B.: Interface model applied to fracture of masonry structures, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 120, pp. 63-80, 1994.
- [16] Pegon, P., Pinto, A.V.: Seismic study of monumental structures - structural analysis, modelling and definition of experimental model, Ispra, Italy, Report EUR 16387 EN 1996, JRC.
- [17] Lourenço, P.B., Rots, J.G.: A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures, *Journal of the Engineering Mechanics ASCE*, 123, pp. 660-668, 1997.
- [18] Stankowski, T., Runesson, K. and Sture, S.: Fracture and slip of interfaces in cementitious composites, I: characteristics, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 119, pp. 292-314, 1993.
- [19] Gambarotta, L. and Lagommarino, S.: Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls, Part I: the mortar joint model and its applications, *Bulletin Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26, pp. 423-439, 1997.
- [20] Radnić, J., Harapin, A., Matešan, D., Trogrlić, B., Smilović, N., Grgić, N., Baloević, G.: Numerički model za statički i dinamički proračun zidanih konstrukcija. *Građevinar*; 63 (6), pp. 529-546, 2011.
- [21] Cundall, P.A.: A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems, *In Proceedings of the Symposium on Rock Fracture (ISRM)*, 1, paper II-8, 1971.
- [22] Pagnoni, T.: Seismic analysis of masonry and block structures with the discrete element method, In: *Proc 10th European conference on earthquake engineering*, 3, pp. 1674-1694, 1994.
- [23] Sincaian, G.E.: *Seismic behaviour of blocky masonry structures. A discrete element method approach*, PhD Dissertation, IST, Lisbon, Portugal, 2001.
- [24] Lemos, J.V.: Discrete element modelling of the seismic behaviour of stone masonry arches, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry*, pp. 220-227, 1998.
- [25] Kun, F., Herrmann, H.J.: A study of fragmentation processes using discrete element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 7, pp. 3-18, 1996.
- [26] Petrinic, N.: *Aspects of discrete element modelling involving facet-to-facet contact detection and interaction*, Ph.D. Dissertation, University of Wales, U.K., 1996.
- [27] Barbosa, B.E.: Discontinuous structural analysis, *In Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering*, Elsevier, pp. 830, 1996.
- [28] Mamaghani, I.H.P., Aydan, O. and Kajikawa, Y.: Analysis of masonry structures under static and dynamic loading by discrete finite element method, *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering (JSCE)*, 16, pp. 75-86, 1999.
- [29] Munjiza, A., Andrews, K.R.F. and White, J.K.: Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, pp. 41-57, 1999.
- [30] Živaljić, N., Smoljanović, H., Nikolić, Ž.: A combined finite-discrete element model for RC structures under dynamic loading, *Engineering Computations (prihvaćen za objavljivanje)*, 2013.
- [31] Živaljić, N.: Metoda konačno diskretnih elemenata za seizmičku analizu armiranobetonskih konstrukcija, Disertacija, Sveučilište u Splitu, Hrvatska, 2012.
- [32] Smoljanović, H., Živaljić, N., Nikolić, Ž.: A combined finite-discrete element analysis of dry stone masonry structures, *Engineering Structures (u postupku objavljivanja)*, 2013.

- [33] Munjiza, A., Andrews, K.R.F. and White, J.K.: Penalty function method for combined finite-discrete element system comprising large number of separate bodies, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49, pp. 1377-1396, 2000.
- [34] Munjiza, A.: *The combined finite-discrete element method, First edition*, John Wiley & Sons, 2004.
- [35] Munjiza, A., Knight, E.E., Rouiger, E.: *Computational Mechanics of Discontinua, First edition*, John Wiley & Sons, 2012.
- [36] Xiang, J., Munjiza, A., Latham, J.P., Guises, R.: On the validation of DEM and FEM/DEM models in 2D and 3D, *Engineering Computations*, 26, pp. 673-687, 2009.
- [37] Hordijk, D.A.: Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete – experiments, modelling and analyses, *Heron*, 37 (1), pp. 3-79, 1992.
- [38] Elwi, A.E., Hrudey, M.: Finite element model for curved embedded reinforcement, *Journal of Engineering Mechanics*, 115, pp. 740-754, 1989.
- [39] Nikolić, Ž., Mihanović, A.: Non-linear finite element analysis of post-tensioned concrete structures, *Engineering Computations*, 14 (5), pp. 509-528, 1997.
- [40] Soltani, M., Maekawa, K.: Path-dependent mechanical model for deformed reinforcing bars at RC interface under coupled cyclic shear and pullout tension, *Engineering Structures*, 30, pp. 1079-1091, 2008.
- [41] Kato, B.: Mechanical properties of steel under load cycles idealizing seismic action, *Bulletin D'Information*, CEB, AICAP-CEB symposium, Rome, pp. 7-27, 1979.
- [42] Hinton, E., Owen, R.: *Computational modelling of reinforced concrete structures*, Pineridge press, Swansea, U.K., 1986.
- [43] Oliveira, D.V.: *Experimental and numerical analyses of blocky masonry structures under cyclic loading, Ph.D. dissertation*, GUIMARÃES, Portugal, University of Minho, 2003.
- [44] Mahabadi, O.K., Cottrell, B.E., Grasselli, G.: An Example of Realistic Modelling of Rock Dynamics Problems: FEM/DEM Simulation of Dynamic Brazilian Test on Barre Granite, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 43, pp. 707-716, 2010.
- [45] Vamvatsikos, D., Cornell, C.A.: Incremental dynamic analysis, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 31, pp. 491-514, 2002.